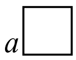
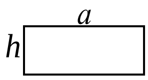
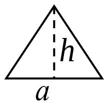
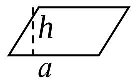
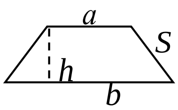
Часть 2. Определенный интеграл.

§1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла (задача о площади криволинейной трапеции).

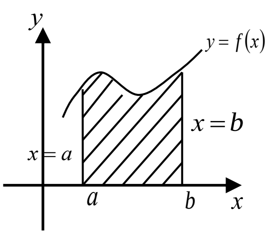
Из школьного курса известны формулы для нахождения площади плоских фигур:


$-S=a^2$;

$=S=a\cdot h$;

$=S=\frac{1}{2}a\cdot h$;

$S=a\cdot h$

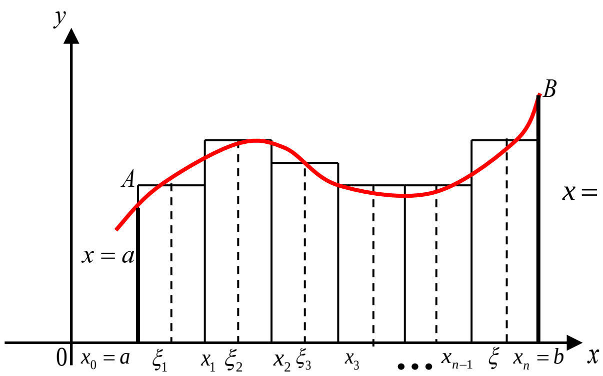

$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$

Пусть требуется вычислить площадь области S, ограниченной некоторой замкнутой кривой.

Определение 1. ***Криволинейной трапецией*** называется фигура, ограниченная частью кривой $y=f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси ОХ и двумя прямыми: $x=a$ и $x=b$ параллельными оси ОУ.



Решим задачу о нахождении площади этой криволинейной трапеции.



$S_{aABb}-?$

Разобьем отрезок $[a;b]$ на «**n**» частей точками $a=x_0;x_1;x_2\dots x_n=b$.

Через каждую точку разбиения проведем прямые параллельные оси ОУ до пересечения с кривой.

Тогда площадь трапеции может быть представлена в виде суммы получившихся в результате указанного разбиения «малых» криволинейных трапеций: $S_{aABb} = S_1 + S_2 + ...S_n$

Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выберем точку. Для отрезка $\left[x_{i-1}; x_i\right]$ эту точку обозначим ξ_1. Из этих точек проведем прямые параллельные оси ОУ до пересечения с кривой $y = f(x)$.

Ординаты точек пересечения равны соответственно $f(\xi_i)$. Каждую малую трапецию заменим прямоугольником с основанием Δx_i и высотой $h = f(\xi_i)$.

Полученную в результате указанных действий ступенчатую фигуру можно рассматривать как приближенное значение искомой площади криволинейной трапеции.

Площади прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, вычисляются соответственно по формулам:

$$S_1 = f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1$$

$$S_2 = f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) = f(\xi_2)\cdot\Delta x_2$$

....

$$S_n = f(\xi_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) = f(\xi_n)\cdot\Delta x_n$$

Следовательно,

$\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$ - площадь ступенчатой фигуры

Отметим, что σ_n тем точнее дает приближенное значение площади криволинейной трапеции, чем больше **n**.

$\boxed{S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$ - площадь криволинейной трапеции.

§2. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Произведем следующие действия:

1. Точками $a = x_0; x_1; x_2 ... x_n = b$ разобьем отрезок $[a;b]$ на «**n**» частей.

2. Внутри каждого отрезка разбиения произвольным образом выбреем точки ξ_i и вычислим произведения $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$.
3. Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4. Обозначим через $\max \Delta x_i$ максимальную длину отрезка разбиения.

Определение 1. Если при $\max \Delta x_i \to 0$ существует предел интегральной суммы σ_n, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части, ни от способа выбора точек, то этот предел называется ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}$$, где

a и b - соответственно нижний и верхний пределы интегрирования;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Определенный интеграл зависит от пределов интегрирования a, b и от вида подынтегральной функции $f(x)$ и не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)d(u)$$

С ***геометрической*** точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции.

С ***физической*** точки зрения определенный интеграл равен работе силы, параллельной перемещению.

§3. Свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b A\cdot f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Интеграл алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен соответствующей алгебраической сумме интегралов слагаемых, т.е.

$$\int_a^b \left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$$

3. Если отрезок $[a;b]$ разбит на два отрезка $[a;c]$ и $[c;b]$, то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5. Если пределы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

6. Если $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. Если $f(x)\geq \varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$$

8. Теорема о среднем:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то существует точка $\xi\in[a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

С геометрической точки зрения теорема о среднем означает, что площадь криволинейной трапеции равновелика площади прямоугольника, основание которого совпадает с основанием трапеции $\left([a;b]\in OX\right)$, а высота равна значению функции $f(x)$ в некоторой точке ξ отрезка $[a;b]$.

Определение 1. Величина $\boxed{M=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx}$ называется ***средним значением*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

§4. Интервал как функция верхнего предела. Теорема Барроу.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. При этом будем полагать a - фиксированным значением, а b- переменным. Тогда функция верхнего предела $У(b)$ примет вид:

$У(b)=\int\limits_a^b f(t)\,dt$ (так как обозначение переменной интегрирования несущественно).

Желая, как обычно, пользоваться для обозначения независимой переменной буквой **x**, имеем:

$\boxed{У(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt}$ - интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема Барроу. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то производная определенного интеграла как функции его верхнего предела равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования.

$$\boxed{\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)}$$

Из сформулированной теоремы следует, что $\int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$.

Пример: $\left(\int_2^x Cos^3 t\,dt\right)' = Cos^3 x;$

$$\left(\int_3^x e^{\sqrt{y}}\,dy\right)' = e^{\sqrt{x}} \quad \text{и т.д.}$$

§5. Формула Ньютона- Лейбница.

Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, не прибегая к интегральным суммам.

Пусть $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Известно, что две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное число,

поэтому $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$.

Для определения величины **C** положим в последнем равенстве $x = a$, тогда

$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0$, следовательно $C = -F(a)$.

Поэтому:

$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$ и следовательно $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

В частности: при $x = b$, получим $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, или, в силу инвариантности интеграла, имеем:

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$ - **формула Ньютона – Лейбница**.

Определение 1. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен приращению первообразной для подынтегральной функции на отрезке интегрирования $[a;b]$, т.е. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{0,5} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Замечания:

1. Формула Ньютона - Лейбница была выведена только для непрерывных функций.
2. Подходы к интегрированию у Ньютона и Лейбница были различные. Лейбниц развивал чистый анализ, исходя из абстрактных понятий. Ньютон рассматривал математику только как способ для физических исследований. Название этой формулы до некоторой степени условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница именно такой формулы не было. Но они независимо друг от друга установили связь между дифференцированием и интегрированием. Лейбниц ввел обозначения:

$$dx\ ;\ d^2x\ ;\ \int f(x)dx\ ;\ \frac{dy}{dx}.$$

§6. Способы вычисления определенного интеграла.

1. Метод подстановки в определенном интеграле.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$.

Перейдем к новой переменной **t**, положив $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)dt$. Вычислим пределы интегрирования для новой функции

x	a	b

t	α	β

, где $a=\varphi(\alpha)$; $b=\varphi(\beta)$, тогда:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}.$$

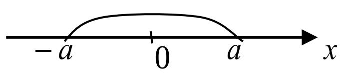
Пример:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=t\\ x+1=t^2\\ dx=2tdt\\ \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 8\\ \hline t & 2 & 3\end{array}\end{array}\right|=\int_2^3\frac{(t^2-1)\cdot 2\cancel{t}dt}{\cancel{t}}=2\int_2^3(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=2\left(\frac{3^2}{3}-3\right)-2\left(\frac{2^3}{3}-2\right)=2\cdot 6-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

Замечание. Для осуществления такой замены необходимо, чтобы $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ были непрерывны на $[\alpha;\beta]$.

2. Определенный интеграл на симметричном отрезке.



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx-?$$

Используя свойства интеграла можно записать:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx \qquad (1)$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_a^0 f(-u)(-du)=-\int_a^0 f(-u)du=\int_0^a f(-u)du$$

$$\left.\begin{array}{c} x=-u \\ dx=-du \\ \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline u & a & 0 \end{array} \end{array}\right|$$

В силу инвариантности интеграла получим:

$$\int\limits_0^a f(-u)\,du=\int\limits_0^a f(-x)\,dx$$

Подставим полученное значение в выражение (1):

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int\limits_0^a f(-x)\,dx+\int\limits_0^a f(x)\,dx \text{ или}$$

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int\big(f(-x)+f(x)\big)dx}$$

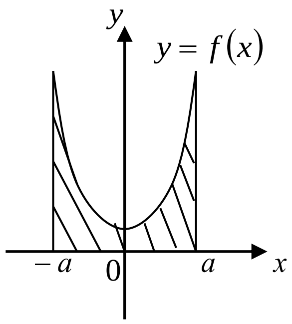
а) для четных функций

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_0^a f(x)\,dx}$$

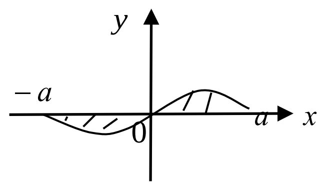
б) для нечетных функций

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0}$$

С геометрической точки зрения определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции, следовательно графически эта формула может быть изображена следующим образом:



четная



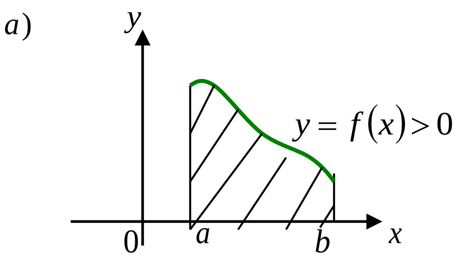
нечетная

§7. Геометрические приложения определенного интеграла.

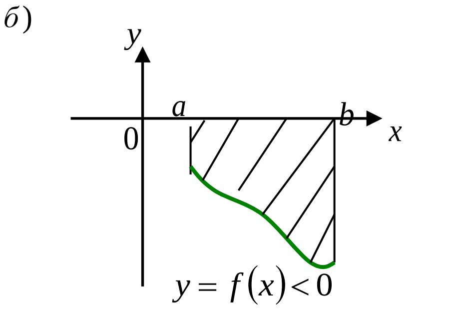
7.1. Площадь плоской фигуры.

Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла (§1) площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y=f(x)$, осью OX и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, численно равна определенному интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Причем, если $f(x)\ge 0$ (рис. а), то



(1) $$\boxed{S} = \int\limits_a^b f(x)dx = \boxed{\int\limits_a^b ydx} \quad (f(x)\ge 0)$$

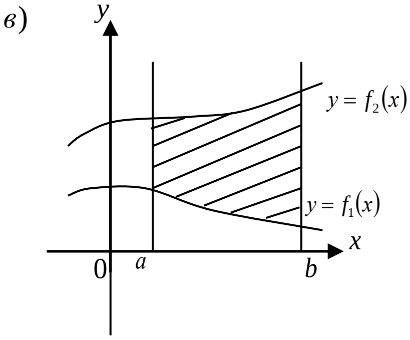


(2) $$\boxed{S} = -\int\limits_a^b f(x)dx = \boxed{-\int\limits_a^b ydx = \int\limits_b^a ydx} \quad (f(x)<0)$$

В случае, если $f(x)<0$ (рис. б),то в формуле (1) имеет место знак «-». В общем случае абсолютная величина выражает искомую площадь, т.е.

$$\boxed{S = \left|\int\limits_a^b ydx\right|}$$

Если фигура ограничена сверху и снизу неотрицательными функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ соответственно, непрерывными на отрезке $[a;b]$ (рис. в), то площадь криволинейной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху графиками функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$ (при $f_2(x) > f_1(x)$):

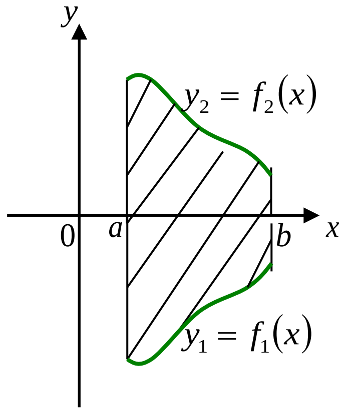


$$S = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \int\limits_a^b (y_2 - y_1)dx$$

$$\boxed{S = \int\limits_a^b (y_2 - y_1)dx} \qquad (3)$$

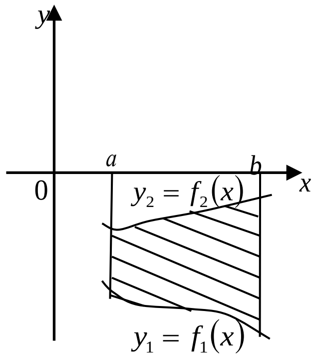
Формула (3) справедлива при любом расположении кривых $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (рис. г, д), при условии, что $f_2(x) > f_1(x)$:

г)



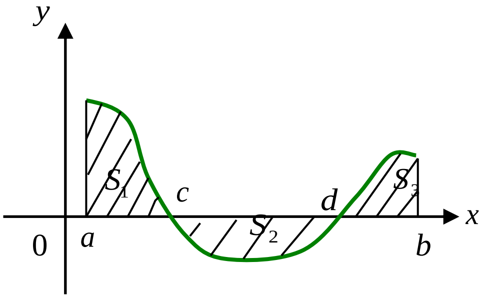
$$\boxed{S = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx}$$

д)



Если график функции $y = f(x)$ на интервале $[a;b]$ несколько раз пересекает ось OX (рис. е), то необходимо вычислить площади фигур, расположенных выше и ниже оси OX и сложить их.

е)



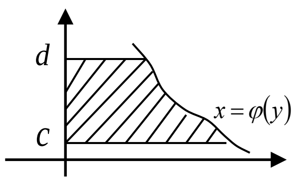
$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx \qquad S_2 = -\int_c^d f(x)dx \qquad S_3 = \int_d^c f(x)dx$$

$$\boxed{S = \int_a^c ydx - \int_c^d ydx + \int_d^b ydx} \qquad (4)$$

Аналогично можно рассмотреть шесть случаев вычисления площади криволинейной трапеции, прилежащей к оси OY.

Например:



$$\boxed{S} = \int_c^d \varphi(y)dy = \boxed{\int_c^d xdy}$$

и т.д.

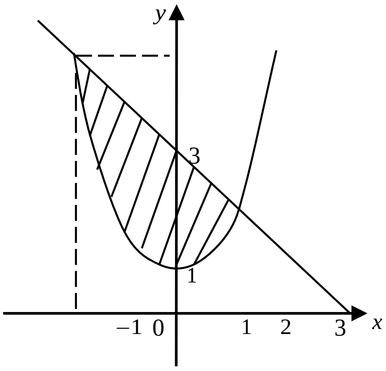
Пример 1: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.

Решение: 1) Построим линии и обозначим криволинейную трапецию:

$y = x^2 + 1$ - парабола, смещенная по оси OY на единицу вверх. Найдем координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 0 \ ; \ y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \pm1 & \pm2 \\ \hline y & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

$y = -x + 3$ - прямая $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$.



2) Найдем точки пересечения линий (левую и правую границу криволинейной трапеции):

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 1 = -x + 3 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ y_2 = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A(1;2) \\ B(-2;5) \end{array}$$

3) Вычислим площадь: $S = \int\limits_a^b (y_2 - y_1)\,dx$, где

$y_2 = -x + 3$; $y_1 = x^2 + 1$; $a = -2$; $b = 1$

$$S = \int\limits_{-2}^{1} \left((-x+3) - (x^2+1) \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(-x + 3 - x^2 - 1 \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(-x - x^2 + 2 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2) \right) =$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-2 + \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{7}{6} + 6 - \frac{8}{3} = \frac{7 + 36 - 16}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2} \text{(кв.ед.)}$$

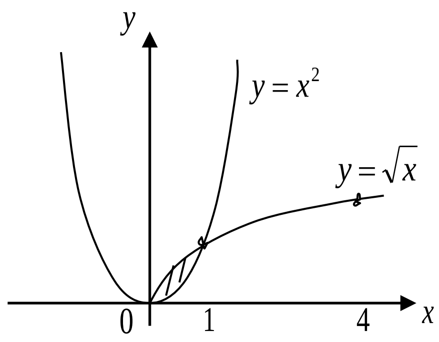
Пример 2: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение:

1). Построим линии:

- $y = \sqrt{x}$ - полупарабола $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 4 & 1 \\ \hline y & 0 & 2 & 1 \end{array}$

- $y = x^2$ - парабола $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \pm 1 & \pm 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 4 \end{array}$



2). Найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \sqrt{x} = x^2 \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

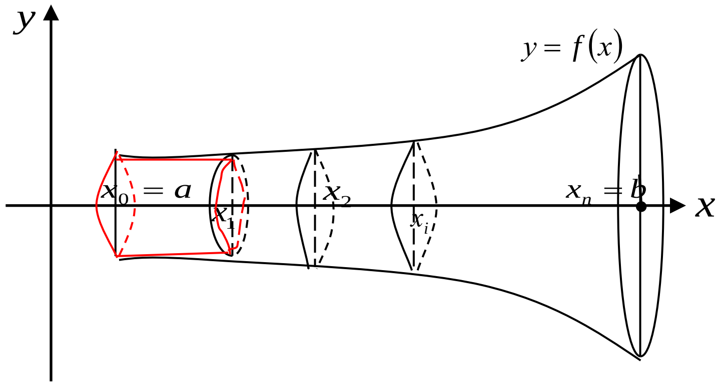
3). Вычислим площадь:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,(\text{кв.ед.})$$

7.2. Объем тела вращения.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y = f(x)$. Найдем объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Пусть известна площадь любого сечения этого тела (вращения) плоскостями, перпендикулярными оси OX. Разобьем тело на слои, перпендикулярные OX и проходящие через точки $x_1; x_2 \ldots x_{n-1}$.



Заменим каждый слой прямым цилиндром с высотой $(x_i - x_{i-1})$ и площадью основания $S(x_i)$. Тогда объем каждого элементарного цилиндра будет равен $V_i = S(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = S(x_i)\cdot\Delta x_i$.

Объем каждого элементарного слоя будет приближенно равен объему соответствующего цилиндра, но отбрасываемая величина бесконечно малая более высокого порядка малости. Тогда объем всего тела будет равен сумме объемов всех слоев: $\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} v_i \approx \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\cdot\Delta x_i}$ и тем точнее будет вычислен объем, чем больше число точек разбиения «x_i», т.е. чем больше «**n**». Переходя к пределу, получим точное равенство:

$\boxed{V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\cdot\Delta x_i}$, а предел такой суммы и является определенным интегралом, т.е. $\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$ (1).

Зная, что $S(x)$ - площадь основания цилиндра и равна $S(x) = \pi r^2$, а радиус $r = y$, имеем $S(x) = \pi y^2$. Тогда формула (1) примет вид:

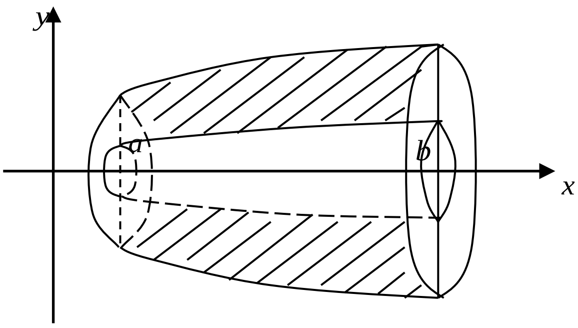
$\boxed{V_{т.в.} = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx}$ - вокруг оси OX .

Аналогично можно вращать трапецию вокруг оси OY, если функция задана как $x = \varphi(y)$. Тогда:

$$\boxed{V_{т.в.} = \pi\int_c^d x^2 dy}$$ - вокруг оси OY.

Замечание. Если на отрезке $[a;b]$ криволинейная трапеция опирается не на ось OX, а ограничена двумя функциями $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$, то имеем:

$$\boxed{V_{т.в.} = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx}.$$



Пример 1:

Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x - x^2$ и $y = 0$. Определить, какова масса продукта, заполняющего этот объем, если $1 м^3$ весит $0,4$ тонны?

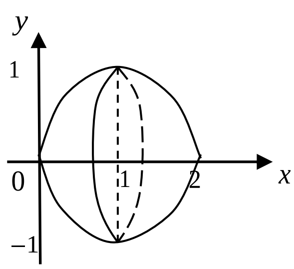
Решение.

1). Построим линии:

- $y = 2x - x^2$ - парабола

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1; \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4-0}{-4} = 1;$$

x	1	0	2
y	1	0	0



2). Найдем объем тела вращения:

$$V_{т.в.}=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=\pi\left(4\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}\cdot 2^3-2^4+\frac{1}{5}\cdot 2^5\right)=\pi\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=\pi\left(\frac{160-240+96}{15}\right)=\frac{16\pi}{15}\left(м^3\right)$$

3). $m=\dfrac{16\pi}{15}\cdot 0,4\approx 1,34m$.

§8. Понятие несобственного интеграла.

При рассмотрении определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ как предела интегральных сумм предполагалось, что:

1. Подынтегральная функция ограничена, т.е. отрезок интегрирования $[a;b]$ был конечным.
2. Подынтегральная функция была непрерывна и определена на отрезке $[a;b]$.

Такой определенный интеграл называется **собственным.**

Определение 1. Если одно или оба из этих условий нарушается, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***несобственным***.

Пример: 1) $\int\limits_0^\infty xdx$ - нарушено 1-е условие;

2) $\int\limits_0^3 \dfrac{dx}{x-2}$ - нарушено 2-е условие.

§2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в интервале $[a;+\infty)$ и интегрируется в любом конечном отрезке $[a;b]$ этого интервала, при условии, что $a<b$.

Определение 1. Если при $b \to \infty$ для $\int_a^b f(x)\,dx$ существует конечный предел, то такой интеграл называется несобственным интегралом с ***бесконечным верхним пределом.***

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (1)$$

Определение 2. Если $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ существует, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***. В противном случае интеграл называется ***расходящимся*** и ему не приписывают никакого числового значения.

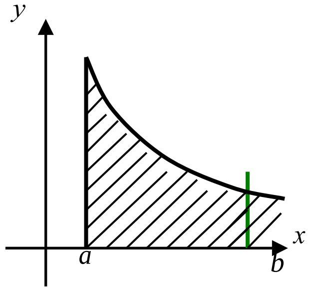
Аналогично можно рассмотреть интеграл:

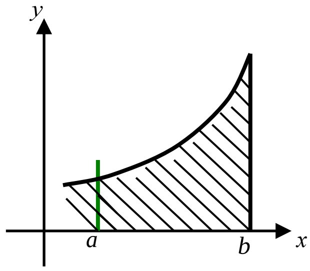
$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$ - несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом.

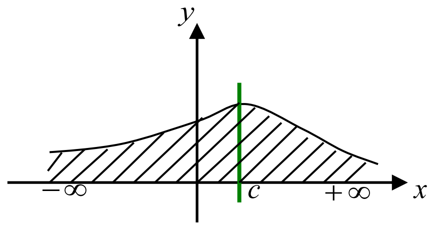
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx},$$

где **c** - фиксированное число (лучше принимать c=0)

С геометрической точки зрения несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования представляет собой площадь криволинейной трапеции (если интеграл сходится).

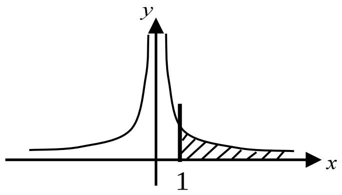






Пример 1:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{\infty}+1=0+1=1$$ - предел конечный, интеграл сходится.



Пример 2:

$$\int_0^{\infty}xdx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b xdx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(b^2-0\right)=\frac{1}{2}\cdot(\infty-0)=\infty$$ - интеграл расходится.

Пример 3:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a\right)+\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0\right)=\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(\infty)-\operatorname{arctg}0=$$

$$=2\operatorname{arctg}\infty=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\quad -e\quad$$ –интеграл сходится.

§3. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $x\in[a;b)$, т.е. $a\le x<b$. Значит, $x=b$ - точка разрыва.

При этом предполагается, что на любом отрезке $[a;b-\varepsilon]$ функция $y=f(x)$ непрерывна и интегрируема.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx}\qquad(2)$$

Определение 1. Как бы ни было мало число $\varepsilon>0$, если существует конечный предел (2), то его называют несобственным интегралом от разрывной функции. Если предел конечный, то интеграл будет сходящимся, если бесконечный, то интеграл расходящийся.

Аналогично рассматриваются интегралы при условии, что $a < x \le b$, $x = a$ - точка разрыва, тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon+a}^{b} f(x)dx}$$

Можно рассматривать интегралы от функции $y = f(x)$ при условии, что $x = c$ - точка разрыва, если $a < c < b$. Тогда:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx}$$

Пример 1: Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^a \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\varepsilon}\right) = a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} - \arcsin 0\right) =$$

$$= a\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right) = a\cdot\arcsin(1-0) = a\cdot\arcsin 1 = a\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2}$$

Предел конечный, интеграл сходящийся.

Пример 2:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_0^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{0-\varepsilon} + \frac{1}{1}\right) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon}\right) = -\left(\frac{1}{0}+1\right) - \left(1-\frac{1}{0}\right) = -\infty + 1 - 1 + \infty = \infty$$

Интеграл расходится.

Покажем, что было бы, если этот интеграл взять как обычный определенный интеграл.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2 \quad \text{- !!!}$$

Этот результат неверный, так как функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx > 0$.